Flujo de Costo Mínimo

Investigación de Operaciones

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Facultad de Contaduría y Ciencias Administrativas
Dr. Víctor G. Alfaro-García

De la ruta más corta al flujo de costo mínimo

Semana 7 · Ruta más corta

- Un origen, un destino
- Flujo de **1 sola unidad**
- Sin capacidades en arcos
- Minimizar distancia/costo
- Algoritmo de Dijkstra

⊂

caso especial

Semana 8 · Flujo de costo mínimo

- Múltiples orígenes (oferta)
- Múltiples destinos (demanda)
- Flujos de distintas magnitudes
- Capacidades en cada arco
- Costos por unidad de flujo
- **Minimizar costo total**

La ruta más corta es un caso especial: flujo de costo mínimo con una sola unidad de flujo.

Componentes del modelo



Nodo fuente (oferta)

Genera flujo.
$b_i > 0$
Ej: planta, almacén



Nodo de transbordo

Redistribuye.
$b_i = 0$
Ej: centro distribución



Nodo sumidero (demanda)

Consume flujo.
$b_i < 0$
Ej: tienda, cliente

Cada arco tiene:

Capacidad u_{ij}

Máximo flujo permitido

Costo c_{ij}

Costo por unidad de flujo

Flujo x_{ij}

Variable de decisión: ¿cuánto se envía?

Restricción

$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$

Principio fundamental: conservación de flujo

Para cada nodo i:

$$\Sigma \text{ (flujo entrante)} - \Sigma \text{ (flujo saliente)} = b_i$$

Nodo fuente

$b_i > 0$

Sale más de lo que entra.

Genera flujo.

Nodo transbordo

$b_i = 0$

Entra = sale.

Solo redistribuye.

Nodo sumidero

$b_i < 0$

Entra más de lo que sale.

Absorbe flujo.

Analogía: red de tuberías de agua

El agua que llega a una intersección = el agua que sale. Excepto en bombas (fuentes) y tanques (sumideros).

Problema de clase: Distribuidora Michoacana de Lácteos

Planteamiento

Una empresa láctea tiene 2 plantas (Morelia y Zamora) y debe abastecer 3 tiendas (T1, T2, T3). Cada ruta tiene un costo de flete ($/caja) y una capacidad máxima. ¿Cuántas cajas enviar por cada ruta para minimizar el costo total?

Datos de la red:

Variable	De (oferta)	A (demanda)	Costo $/caja	Cap. máx. (cajas)
x_{11}	Morelia (50 cajas)	T1 (dem: 30)	$4	40
x_{12}	Morelia (50 cajas)	T2 (dem: 40)	$8	30
x_{13}	Morelia (50 cajas)	T3 (dem: 30)	$5	50
x_{21}	Zamora (60 cajas)	T1 (dem: 30)	$7	45
x_{22}	Zamora (60 cajas)	T2 (dem: 40)	$3	50
x_{23}	Zamora (60 cajas)	T3 (dem: 30)	$6	35

Formulación matemática del modelo

Variables

x_{ij} = cajas enviadas de planta i a tienda j

x_{11}, x_{12}, x_{13} (desde Morelia)

x_{21}, x_{22}, x_{23} (desde Zamora)

Función objetivo — Minimizar costo total:

$$\text{Min } Z = 4x_{11} + 8x_{12} + 5x_{13} + 7x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23}$$

Restricciones

Oferta Morelia:	$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 50$	*(no superar producción)*
Oferta Zamora:	$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 60$	
Demanda T1:	$x_{11} + x_{21} = 30$	*(satisfacer exactamente)*
Demanda T2:	$x_{12} + x_{22} = 40$	
Demanda T3:	$x_{13} + x_{23} = 30$	
Capacidades:	$x_{ij} \leq$ límites de la tabla	*(cada ruta)*
No negatividad:	$x_{ij} \geq 0$	*(para todo i, j)*

Este modelo es Programación Lineal estándar. Excel Solver lo resuelve directamente.

Interpretar resultados: más allá de los números

Solución óptima

Ruta	Flujo (cajas)	Costo parcial
Morelia → T1 (x_{11})	30	$120
Morelia → T2 (x_{12})	0	$0
Morelia → T3 (x_{13})	20	$100
Zamora → T1 (x_{21})	0	$0
Zamora → T2 (x_{22})	40	$120
Zamora → T3 (x_{23})	10	$60
TOTAL	**100 cajas**	**$400**

Preguntas clave

- ¿Qué rutas se usaron y cuáles no?
- ¿Qué planta quedó con capacidad ociosa?
- ¿Hay rutas al límite de capacidad?
- ¿Precio sombra en arcos clave?
- ¿Conviene renegociar flete en alguna ruta?
- ¿Qué pasa si T2 sube su demanda a 50?

El reporte de sensibilidad de Solver revela el valor económico de relajar cada restricción (precio sombra).

Análisis de sensibilidad — Variables de decisión

x_{11} = 30 · Ruta 1→T1 · $4

Costo reducido = 0 → en la solución. Puede subir hasta $6 ($4+2) sin dejar de usarse. Sin límite inferior (es la más barata para T1).

x_{12} = 0 · Ruta 1→T2 · $8

Costo reducido = 6 → no se usa. Tendría que bajar a $2 para entrar. Es la ruta más cara y Solver la descartó completamente.

x_{13} = 20 · Ruta 1→T3 · $5

Costo reducido = 0 → en la solución. Rango muy estrecho: sube $1 (a $6) o baja $2 (a $3). Es la variable más sensible del modelo.

x_{21} = 0 · Ruta 2→T1 · $7

Costo reducido = 2 → no se usa. Tendría que bajar a $5 para entrar. La restricción de oferta de P1 limita el uso de rutas alternativas a T1.

x_{22} = 40 · Ruta 2→T2 · $3

Costo reducido = 0 → en la solución, la ruta más barata del modelo. Puede subir hasta $9 ($3+6). Sin límite inferior (domina T2).

x_{23} = 10 · Ruta 2→T3 · $6

Costo reducido = 0 → en la solución. Rango estrecho: sube máximo $2 (a $8) o baja $1 (a $5). Si baja a $5 empata con x_{13} — soluciones múltiples.

Análisis de sensibilidad — Restricciones y decisión gerencial

Oferta P1 ≤ 50 → Vinculante · Precio sombra = −1

P1 usa toda su capacidad (50 de 50). Cada unidad adicional de oferta en P1 baja el costo total $1. Rango válido: 40–60 u. Es el cuello de botella de oferta del sistema.

Oferta P2 ≤ 60 → No vinculante · Precio sombra = 0

P2 usa solo 50 de 60 disponibles. Sobran 10 unidades. Agregar más oferta en P2 no cambia nada — ya hay excedente. Ampliar P2 es dinero perdido.

Demanda T1 = 30 → Vinculante · Precio sombra = 5

Cada unidad adicional de demanda en T1 sube el costo $5. Rango: 20–40 u. T1 es el segundo destino más caro de atender en el margen.

Demanda T2 = 40 → Vinculante · Precio sombra = 3

Cada unidad adicional en T2 sube el costo $3. Rango: 0–80 u. El destino más flexible y el más barato de atender en el margen (x_{22} a $3 domina).

Demanda T3 = 30 → Vinculante · Precio sombra = 6

El destino más caro de satisfacer: $6 por unidad adicional. Rango: 20–40 u. Se atiende combinando x_{13} y x_{23} — ambas rutas relativamente caras.

CONCLUSIÓN GERENCIAL

Dos palancas reales para bajar el costo: más oferta en P1 ($1 de ahorro por unidad) o reducir demanda de T3 ($6 de ahorro por unidad). Ampliar P2 no sirve — ya tiene excedente. La ruta x_{12} ($8) está tan fuera de precio que ni con descuentos moderados entraría a la solución.

Cómo leer los informes de Excel Solver

Referencia rápida

① Informe de Respuestas

Vinculante
Restricción activa — límite alcanzado. No hay holgura. Si afloja esta restricción, el costo cambia.

No vinculante
Restricción inactiva — sobra capacidad. La Demora muestra cuánto margen queda.

Demora (slack)
Unidades sobrantes en una restricción No vinculante. Demora = 0 confirma que es Vinculante.

② Sensibilidad — Variables

Costo reducido = 0
La variable SÍ está en la solución (flujo > 0). Es una ruta activa.

Costo reducido > 0
Variable fuera de la solución (flujo = 0). Indica cuánto debería bajar su costo para entrar.

Permisible aumentar / reducir
Rango en que puede variar el costo unitario c_{ij} sin cambiar qué rutas son óptimas.

③ Sensibilidad — Restricciones

Precio sombra > 0
Cada unidad extra en el lado derecho mejora la FO en ese monto. Restricción que 'duele'.

Precio sombra = 0
Aflojar esta restricción no mejora el costo. Hay holgura disponible.

Precio sombra < 0
En minimización: restricción de demanda. Más demanda sube el costo.

Aplicado al problema de hoy (Morelia / Zamora)

Restricción Producción T3 (dem:30) → Vinculante, Demora=0

Morelia usa exactamente su cap. de 50 u. No sobra nada. Si tuvieras más oferta, podrías bajar costo.

Precio sombra demanda T3 = 5

Si T3 pidiera 1 unidad más (31 en vez de 30), el costo total subiría $5.

Costo reducido x_{12} (Mor→T2) = 6

Esta ruta no se usa. Su costo tendría que bajar $6 para que Solver la eligiera.

Precio sombra Producción T3 = −1

Si Morelia tuviera 1 unidad más de oferta, el costo bajaría $1.

Resumen de la semana

1. El flujo de costo mínimo generaliza la ruta más corta: múltiples flujos, capacidades y costos simultáneos.
2. La conservación de flujo en cada nodo es la restricción estructural que da forma al modelo.
3. La formulación es Programación Lineal estándar — Excel Solver la resuelve directamente.
4. El valor del administrador está en interpretar resultados y extraer decisiones, no en el cálculo.