Método Simplex: Concepto e Interpretación

Semana 4

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Facultad de Contaduría y Ciencias Administrativas
Dr. Víctor G. Alfaro-García

¿Qué es el Método Simplex?

Algoritmo sistemático para resolver problemas PL
de CUALQUIER tamaño (2, 10, 1000+ variables)

Desarrollado por George Dantzig (1947)
Uno de los TOP 10 algoritmos del siglo XX

IDEA FUNDAMENTAL:

Simplex = Método Gráfico ALGEBRAICO

Método Gráfico (2D):
- Dibuja región factible
- Identifica TODOS vértices
- Evalúa Z en cada uno
- Elige mejor

Simplex (nD):
- Representa vértices ALGEBRAICAMENTE
- Empieza en vértice inicial
- Busca vértice ADYACENTE mejor
- Se MUEVE a él (pivoteo)
- Repite hasta OPTIMALIDAD

MISMA LÓGICA, implementación diferente

Concepto Clave: Variables Básicas y No Básicas

REPRESENTACIÓN de VÉRTICES:

Cada vértice se representa eligiendo:
- **m variables BÁSICAS (= número restricciones)**
- **n-m variables NO BÁSICAS**

Variables NO BÁSICAS = 0
Variables BÁSICAS se resuelven del sistema

EJEMPLO: Wyndor en forma estándar

$$\text{Max } Z = 3X_1+5X_2$$
$$\text{s.a. } X_1 + S_1 = 4$$
$$2X_2 + S_2 = 12$$
$$3X_1+2X_2 + S_3 = 18$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

5 variables, 3 restricciones
→ 3 básicas, 2 no básicas en cada vértice

VÉRTICE O (origen):
- No básicas: $X_1=0$, $X_2=0$
- Básicas: $S_1=4$, $S_2=12$, $S_3=18$ (resueltas)
- $Z=0$

VÉRTICE B (óptimo):
- No básicas: $X_1=?$, $S_2=0$
- Básicas: $X_2=6$, $S_1=?$, $S_3=0$
- ...(determinar algebraicamente)

Tableau Simplex: Organización de la Información

Simplex organiza datos en TABLEAU (tabla):

Base	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS	
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	← fila Z
S_1	0	1	0	1	0	0	4	
S_2	0	0	2	0	1	0	12	← restricciones
S_3	0	3	2	0	0	1	18	

COLUMNAS:
- Variables decisión y holgura
- RHS = lado derecho (Right Hand Side)

FILAS:
- Fila Z: función objetivo
- Otras: restricciones

BASE: variables básicas actuales
Coeficientes Z negativos → puede mejorar

Tableau = fotografía de un VÉRTICE

INTERPRETACIÓN:

Este tableau inicial representa vértice origen O=(0,0)
Variables básicas: S_1=4, S_2=12, S_3=18
Variables no básicas: X_1=0, X_2=0
Z=0

Criterios del Método Simplex

CRITERIO de ENTRADA:
(¿Qué variable entra a base?)

Elegir variable NO BÁSICA con coeficiente MÁS NEGATIVO en fila Z

→ La que MÁS mejora Z por unidad

CRITERIO de SALIDA:
(¿Qué variable sale de base?)

Prueba razón mínima:
RHS / coef.columna (solo positivos)

Elegir mínimo

→ Evita violar no negatividad

OPTIMALIDAD:

Si TODOS los coeficientes en fila Z son ≥ 0
→ Vértice actual es ÓPTIMO
→ STOP

ITERACIÓN (pivoteo):

```
1. Identificar variable ENTRA (columna pivote)
2. Identificar variable SALE (fila pivote)
3. Elemento pivote = intersección
4. Operaciones elementales fila → nuevo tableau
5. Repetir hasta optimalidad
```

Ejemplo: Primera Iteración Wyndor

TABLEAU INICIAL:

Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS	Razón	
1	-3	-5	0	0	0	0		
0	1	0	1	0	0	4	∞	
0	0	2	0	1	0	12	6	← mín
0	3	2	0	0	1	18	9	
		↑ entra						

DECISIONES:

ENTRA: X_2 (coef. -5, más negativo)
SALE: S_2 (razón 12/2=6, mínima)
PIVOTE: elemento (fila S_2, col X_2) = 2

OPERACIONES:
1. Fila pivote / 2 → nueva fila S_2
2. Hacer ceros en columna X_2

TABLEAU DESPUÉS ITERACIÓN 1:

Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS	
1	-3	0	0	2.5	0	30	
0	1	0	1	0	0	4	
0	0	1	0	0.5	0	6	← X_2 básica
0	3	0	0	-1	1	6	

AÚN hay coef. negativo (-3)
→ NO óptimo, continuar

Interpretación de la Solución Final

TABLEAU ÓPTIMO (después iteración 2):

Base	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS	
Z	1	0	0	0	1.5	1	36	← Z*=36
S_1	0	0	0	1	0.5	$-\frac{1}{3}$	2	← S_1=2
X_2	0	0	1	0	0.5	0	6	← X_2=6
X_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	← X_1=2

Todos coef. fila Z ≥ 0 → ÓPTIMO

SOLUCIÓN:

VARIABLES DECISIÓN:

$X_1^* = 2$ lotes Producto 1

$X_2^* = 6$ lotes Producto 2

$Z^* = 36$ (miles $, ganancia semanal)

VARIABLES HOLGURA:

$S_1 = 2h$ (Planta 1: 2h ociosas de 4h)

$S_2 = 0$ (Planta 2: totalmente usada)

$S_3 = 0$ (Planta 3: totalmente usada)

RESTRICCIONES ACTIVAS (holgura=0): Planta 2, 3

RESTRICCIONES INACTIVAS (holgura>0): Planta 1

INTERPRETACIÓN: Plantas 2 y 3 son CUELLOS DE BOTELLA

Aumentar capacidad ahí mejora ganancia

Holguras revelan qué restricciones LIMITAN la solución

¿Por Qué NO Ejecutar Simplex Manualmente?

REALIDAD de problemas REALES:

PROBLEMA PEQUEÑO (10 variables, 5 restricciones):
- Tableau 5×11
- ~3-6 iteraciones típicas
- 30-60 minutos a mano
- Software: 0.001 segundos

PROBLEMA MEDIANO (100 variables, 50 restricciones):
- Tableau 50×101
- Imposible escribir en papel
- Software: 0.1 segundos

PROBLEMA GRANDE (10,000 variables, 5,000 restricciones):
- Rutinario en logística
- Software: segundos

ERRORES ARITMÉTICOS:
- A mano: muy probable
- Un error pequeño → solución completamente incorrecta
- Software: preciso

CONCLUSIÓN:

✓ Entender LÓGICA: fundamental
✓ Ejecutar 2-3 problemas PEQUEÑOS a mano: didáctico
✗ Ejecutar problemas grandes a mano: PÉRDIDA DE TIEMPO

Nadie en industria resuelve Simplex manualmente
TODOS usan software

Casos Especiales en Simplex

DEGENERACIÓN:

Variable básica = 0

(vértice con más de n-m restricciones activas)

Puede causar CICLAJE

Raro pero posible

EMPATE ENTRADA:

Dos variables con mismo coef. negativo

Elegir cualquiera

No afecta resultado final

EMPATE SALIDA:

Dos filas con misma razón mín

Elegir cualquiera

Puede causar degeneración

NO ACOTADO:

Todos coef. columna entrante ≤ 0

→ Variable puede aumentar ∞

→ Z → ∞

No hay óptimo finito

Problema mal formulado

MÚLTIPLES ÓPTIMOS:

Coef. var. no básica = 0 en tableau óptimo

→ Puede entrar sin cambiar Z

→ Otro vértice con mismo Z óptimo

Bueno: flexibilidad para elegir

Variables Artificiales (Método Big M)

PROBLEMA: ¿Cómo empezar Simplex con restricciones ≥ o = ?

Con restricciones ≤:
- Agregamos holgura S
- S es básica inicialmente
- Origen es factible
- Simplex arranca

Con restricciones ≥ o =:
- Agregamos exceso/nada
- NO hay variables básicas obvias
- Origen NO es factible
- ¿Dónde empezar?

SOLUCIÓN: Variables artificiales

1. Agregar variable ARTIFICIAL a cada restricción problemática (≥ o =)

2. Variable artificial es básica inicial (da punto de partida factible ARTIFICIAL)

3. Penalizar en función objetivo:
   Min: +M×A (M muy grande)
   Max: -M×A

4. Simplex EXPULSA artificiales de base (por penalización enorme)

5. En óptimo: todas artificiales = 0
   Si alguna >0 → problema INFACTIBLE

Complejidad Computacional de Simplex

TEORÍA vs PRÁCTICA:

PEOR CASO TEÓRICO:
Simplex puede tomar tiempo EXPONENCIAL
(visitar exponencialmente muchos vértices)

PRÁCTICA REAL:
Simplex casi siempre es MUY RÁPIDO
Típicamente O(m) iteraciones (lineal en # restricciones)

Victoria práctica sobre teoría

MÉTODOS ALTERNATIVOS:
Punto Interior (Karmarkar 1984):
- Complejidad polinomial GARANTIZADA
- Para problemas MUY grandes
- Simplex aún preferido para muchos problemas

MENSAJE:

No necesitan preocuparse por complejidad
Software moderno resuelve problemas RUTINARIAMENTE con:
- **Miles de variables**
- **Miles de restricciones**
- **En segundos**

PL es problema TRATABLE (a diferencia de muchos otros)

Consejos para Interpretar Resultados Simplex

1. VERIFICAR OPTIMALIDAD:
   Todos coef. fila Z no negativos
   Si no → error o no terminó

2. LEER SOLUCIÓN:
   Variables básicas: valores en RHS
   Variables no básicas: cero
   Z óptimo: fila Z, columna RHS

3. INTERPRETAR HOLGURAS:
   Holgura = 0 → restricción ACTIVA (cuello botella)
   Holgura > 0 → restricción INACTIVA (sobra recurso)
   Enfocarse en activas para mejorar sistema

4. PRECIOS SOMBRA (próxima semana):
   Valor marginal de recursos
   Guía para inversión

5. VERIFICAR SENTIDO:
   ¿Solución lógica en contexto?
   ¿Números razonables?
   Siempre verificar con sentido común

6. RESTRICCIONES VIOLADAS:
   Si alguna restricción no se cumple
   → ERROR en formulación o datos

7. SENSIBILIDAD:
   ¿Qué tan robusta es solución?
   ¿Cambios pequeños en datos alteran mucho?

INTERPRETACIÓN > CÁLCULO

Ejercicio: Problema Pequeño Completo

PROBLEMA:

Max $Z = 2X_1 + 3X_2$

s.a. $X_1 + 2X_2 \leq 8$

$3X_1 + 2X_2 \leq 12$

$X_1, X_2 \geq 0$

Este problema resolverán USTEDES en clase
Paso a paso, juntos

PASOS:

1. Convertir a FORMA ESTÁNDAR
   (agregar S_1, S_2)

2. Construir TABLEAU INICIAL

3. ITERACIÓN 1:
   - Identificar entra/sale
   - Pivotear
   - Nuevo tableau

4. ITERACIÓN 2 (si necesaria):
   - Repetir proceso

5. VERIFICAR OPTIMALIDAD

6. LEER SOLUCIÓN:
   X_1^*, X_2^*, Z^*
   S_1, S_2 (holguras)

7. INTERPRETAR:
   ¿Qué restricción limita?
   ¿Dónde invertir?

Resumen y Mensaje Final

(navegar vértices algebraicamente)

✓ CONCEPTOS clave
(básicas, no básicas, tableau, pivoteo)

✓ INTERPRETACIÓN soluciones
(holguras, optimalidad, restricciones activas)

✓ CASOS especiales

✓ Por qué MANUAL es didáctico
pero SOFTWARE es profesional

MENSAJE:

Simplex es ALGORITMO FUNDAMENTAL
de optimización

Entender CONCEPTO >> ejecutar manualmente