Solución Gráfica y Conceptos Fundamentales de PL

Semana 3

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Facultad de Contaduría y Ciencias Administrativas
Dr. Víctor G. Alfaro-García

Método Gráfico: ¿Por qué y Cómo?

¿POR QUÉ aprender método gráfico?

- ✓ Desarrollar INTUICIÓN VISUAL Ver qué pasa geométricamente
- ✓ Entender CONCEPTOS fundamentales: Región factible, vértices, óptimo
- ✓ Preparación para SIMPLEX: Simplex hace lo mismo pero algebraicamente
- ✓ Identificar CASOS ESPECIALES: Problemas sin solución, múltiples óptimos

LIMITACIÓN: Solo 2 variables (máximo 3)

PROCESO (5 pasos):

1. Graficar cada RESTRICCIÓN como línea
2. Identificar lado FACTIBLE de cada línea
3. Encontrar REGIÓN FACTIBLE (intersección)
4. Identificar VÉRTICES (esquinas)
5. Evaluar función objetivo en cada vértice
   → ÓPTIMO = vértice con mejor valor

Teorema: Si existe óptimo, está en un VÉRTICE

Wyndor Gráfico: Paso 1 - Graficar Restricciones

MODELO WYNDOR:

Max $Z = 3X_1 + 5X_2$

s.a. $X_1 \leq 4$

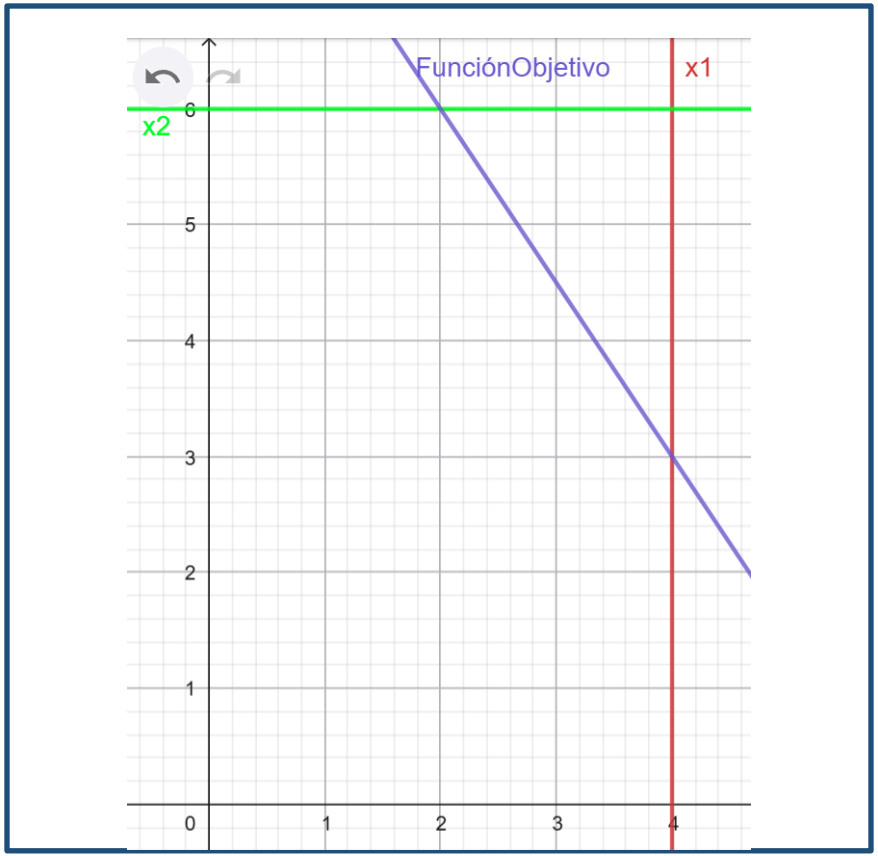
$2X_2 \leq 12$

$3X_1+2X_2 \leq 18$

$X_1, X_2 \geq 0$

Graficamos en plano X_1-X_2:

① $X_1=4$ (línea vertical ROJA)
② $2X_2=12 \rightarrow X_2=6$ (horiz.)
③ $3X_1+2X_2=18$ (diagonal)



Cada restricción divide plano en DOS lados

Wyndor: Pasos 2-3 - Región Factible

Identificar lado FACTIBLE de cada restricción:

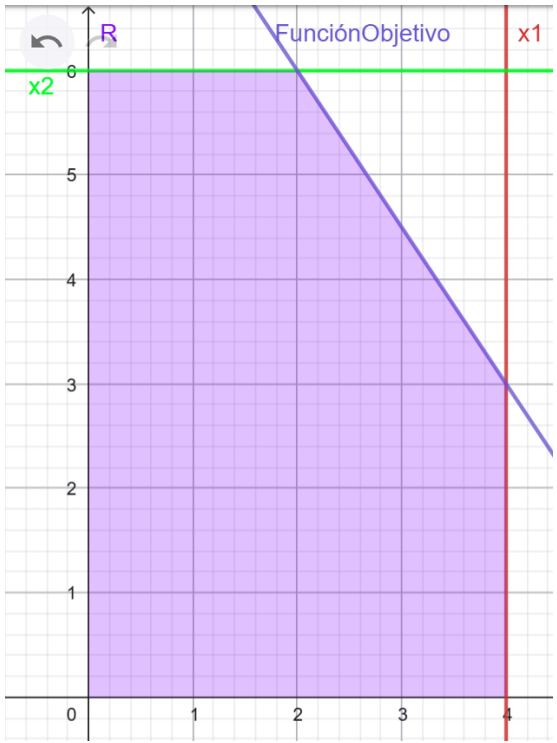
① $X_1 \leq 4$: IZQUIERDA de línea
(prueba: $X_1=0$ cumple)

② $X_2 \leq 6$: ABAJO de línea
(prueba: $X_2=0$ cumple)

③ $3X_1+2X_2 \leq 18$: ABAJO-IZQ
(prueba: origen cumple)

④ $X_1, X_2 \geq 0$: Cuadrante I

REGIÓN FACTIBLE: Polígono OABCD (▒)
VÉRTICES:
O=(0,0)
A=(0,6)
B=(2,6)
C=(4,3)
D=(4,0)



Región factible = Intersección de todos los lados factibles

Wyndor: Pasos 4-5 - Evaluar y Encontrar Óptimo

Evaluar función objetivo $Z=3X_1+5X_2$ en cada VÉRTICE:

Vértice	(X_1, X_2)	$Z = 3X_1 + 5X_2$	
O	(0, 0)	3(0)+5(0) = 0	
A	(0, 6)	3(0)+5(6) = 30	
B	(2, 6)	3(2)+5(6) = 36	✓ MÁXIMO
C	(4, 3)	3(4)+5(3) = 27	
D	(4, 0)	3(4)+5(0) = 12	

SOLUCIÓN ÓPTIMA:
$X_1^* = 2$ lotes Producto 1
$X_2^* = 6$ lotes Producto 2
$Z^* = 36$ miles de pesos ganancia

INTERPRETACIÓN:

Wyndor debe producir:
- **2 lotes de puertas**
- **6 lotes de ventanas**

Obtendrá ganancia semanal de $36,000
RECURSOS USADOS:
Planta 1: 2×1 = 2h de 4h (holgura 2h)
Planta 2: 6×2 = 12h de 12h (totalmente usada)
Planta 3: 2×3+6×2 = 18h de 18h (totalmente usada)

Líneas de Nivel (Isovalor) de la Función Objetivo

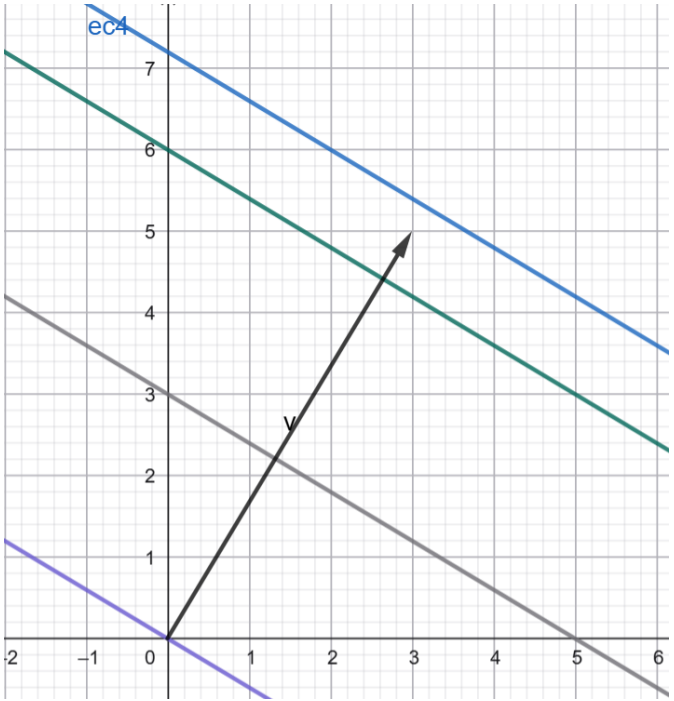
OTRA FORMA de encontrar óptimo:

LÍNEAS ISOVALOR:
$Z = 3X_1 + 5X_2 = k$

Cada valor k = una línea
Todas PARALELAS

Ejemplos:
$Z=0: \quad 3X_1+5X_2=0$
$Z=15: \quad 3X_1+5X_2=15$
$Z=30: \quad 3X_1+5X_2=30$
$Z=36: \quad 3X_1+5X_2=36$ ✓

Dirección crecimiento:
Perpendicular a líneas



El óptimo es donde línea isovalor más alta TOCA región factible

Casos Especiales en Programación Lineal

INFACTIBLE:
Restricciones contradictorias
No existe solución factible
Región
Factible VACÍA

NO ACOTADO:
Región factible infinita
Z puede crecer indefinidamente
No hay Óptimo finito

MÚLTIPLES ÓPTIMOS:

Línea isovalor paralela a lado
TODO el lado es óptimo

EJEMPLOS:

INFACTIBLE:
Max $Z = X_1+X_2$
s.a. $X_1+X_2 \leq 5$
$X_1+X_2 \geq 10$ ← contradice anterior

NO ACOTADO:
Max $Z = X_1+X_2$
s.a. $X_1 \geq 1$
$X_2 \geq 1$ (solo lower bounds, sin upper)
→ $Z \rightarrow \infty$

MÚLTIPLES ÓPTIMOS:
Max $Z = 2X_1+4X_2$
s.a. $X_1+2X_2 \leq 8$ ← paralela a objetivo
$X_1, X_2 \geq 0$
→ Todo segmento (0,4)-(4,2) óptimo
Z=16

Ejemplo: Problema de Minimización

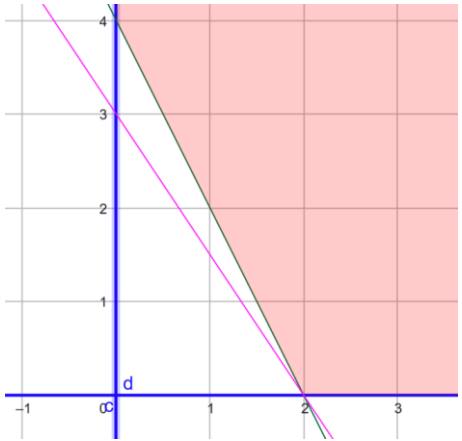
PROBLEMA: Fábrica alimentos mascotas. Mezclar carne (X_1 kg) y cereal (X_2 kg)
COSTOS: Carne \$4/kg, Cereal \$2/kg
REQUERIMIENTOS: Proteína ≥8g, Grasa ≥6g
APORTES: Carne (4g prot, 3g grasa), Cereal (2g prot, 2g grasa)

MODELO:

$$\text{Min } C = 4X_1 + 2X_2$$

s.a.
$4X_1+2X_2 \geq 8$ (proteína)
$3X_1+2X_2 \geq 6$ (grasa)
$X_1, X_2 \geq 0$

SOLUCIÓN GRÁFICA:



Región factible:
Superior-derecha
mayor o igual)
Vértices:
A=(0,4): C=8
B=(1,2): C=8 ✓
C=(2,0): C=8 ✓

MÚLTIPLES ÓPTIMOS:

Línea isovalor C=8 paralela a restricción proteína

TODO segmento A-B tiene C*=8

Pueden elegir:
- A: (0kg,4kg) puro cereal
- B: (1kg,2kg) mezcla
- Cualquier intermedio

Decisión por otros criterios (sabor, disponibilidad)

Limitaciones del Método Gráfico

RESTRICCIÓN DIMENSIONAL:
✗ Solo 2 variables (máx 3 con dificultad) - Problemas reales: 10, 100, 1000+ variables
✗ Con 3 variables → espacio 3D (difícil dibujar) - Con 4+ variables → imposible visualizar
✗ Muchas restricciones → gráfica saturada 5-6 restricciones ya es confuso

PRECISIÓN:
✗ Depende de calidad del dibujo - Errores al medir coordenadas
✗ Vértices con coordenadas irracionales - Difícil leer valores exactos

VELOCIDAD:
✗ Lento (5-10 min por problema) - Software resuelve en milisegundos

ENTONCES, ¿PARA QUÉ LO USAMOS?
→ INTUICIÓN GEOMÉTRICA
→ CONCEPTOS FUNDAMENTALES
→ BASE para entender SIMPLEX
→ Identificar CASOS ESPECIALES

Problemas reales → SOFTWARE (próxima semana)

Teorema Fundamental de PL

TEOREMA:

**Si un problema de PL tiene solución óptima,
al menos UN VÉRTICE de la región factible
es ÓPTIMO**

CONSECUENCIAS:

1. NO necesitamos buscar en TODO el espacio infinito. Solo evaluar VÉRTICES (finitos)
2. Región con n variables y m restricciones: Máximo C(n,m) vértices posibles (combinaciones, número finito)
3. SIMPLEX explota esto: Visita vértices sistemáticamente. Mejorando Z en cada paso. Hasta encontrar óptimo
4. Garantía de TERMINACIÓN: Número finito de vertices → algoritmo termina
5. Si región no acotada: Puede NO haber óptimo ($Z \to \infty$)

Conexión: Método Gráfico → Simplex

MÉTODO GRÁFICO:
(2 variables)

1. Dibujar región factible
2. Identificar TODOS vértices
3. Evaluar Z en cada uno
4. Elegir mejor

VISUAL, INTUITIVO
Solo 2D

SIMPLEX:
(n variables)

1. Empezar en vértice inicial
2. Buscar vértice ADYACENTE mejor
3. Moverse a él
4. Repetir hasta no poder mejorar

ALGEBRAICO
Cualquier dimensión

MISMA LÓGICA, DIFERENTE IMPLEMENTACIÓN:

Ambos métodos:
- Buscan en VÉRTICES (no interior)
- Explotan teorema fundamental
- Garantizan encontrar óptimo si existe

Diferencia:
- Gráfico: evalúa TODOS (exhaustivo, solo 2D)
- Simplex: evalúa INTELIGENTEMENTE (eficiente, nD)

Próxima semana: SIMPLEX paso a paso

Ejemplo Completo Paso a Paso

PROBLEMA:

Max $Z = X_1 + 2X_2$

s.a. $X_1+X_2 \leq 6$

$2X_1+X_2 \leq 10$

$X_2 \leq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

1. Restricción 1: $X_1+X_2=6$
   (0,6), (6,0)

2. Restricción 2: $2X_1+X_2=10$
   (0,10), (5,0)

3. Restricción 3: $X_2=4$
   (horizontal)

4. Intersecciones:
   B: $X_2=4$ y $X_1+X_2=6$
   → $X_1=2$
   C: $X_1+X_2=6$ y $2X_1+X_2=10$
   → $X_1=4$, $X_2=2$

5. Evaluar Z en O,A,B,C,D

Vértices:

O=(0,0): Z=0

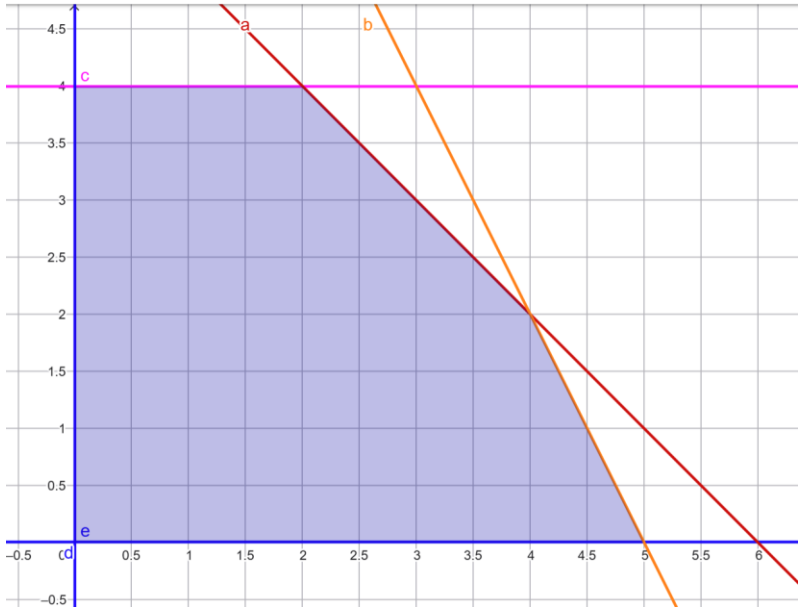
A=(0,4): Z=8

B=(2,4): Z=10 ✓

C=(4,2): Z=8

D=(5,0): Z=5

ÓPTIMO: $X_1^*=2$, $X_2^*=4$, $Z^*=10$



Herramientas para Graficar

PAPEL MILIMÉTRICO: (tradicional)
PRO:
✓ Simple
✓ No requiere tech
✓ Desarrolla habilidad manual
CONTRA:
✗ Lento
✗ Impreciso
✗ No escalable

SOFTWARE: (recomendado)
OPCIONES:
- GeoGebra (gratis)
- Desmos (online)
- MATLAB
- Python+Matplotlib

PRO:
✓ Preciso
✓ Rápido
✓ Bonito

RECOMENDACIÓN PARA TAREAS:

Pueden usar:
- Papel milimétrico + lápiz (válido, tradicional)
- GeoGebra (gratis, fácil, recomendado)
- Desmos (online, no instalar)
- Excel (puede graficar, limitado)

Lo IMPORTANTE:
- Gráfica CLARA y LEGIBLE
- Vértices IDENTIFICADOS con coordenadas
- Cálculos MOSTRADOS (no solo resultado)
- Solución INTERPRETADA

Resumen y Próxima Semana

HOY APRENDIMOS:

✓ 4 SUPUESTOS de PL
(proporcionalidad, aditividad, divisibilidad, certidumbre)

✓ MÉTODO GRÁFICO paso a paso
(graficar, región, vértices, evaluar)

✓ Por qué ÓPTIMO en VÉRTICE
(teorema fundamental)

✓ CASOS ESPECIALES
(infactible, no acotado, múltiples)

✓ INTUICIÓN GEOMÉTRICA
de optimización lineal

¡Practiquen método gráfico!