Formulación de Problemas de Programación Lineal

Semana 2

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Facultad de Contaduría y Ciencias Administrativas
Dr. Víctor G. Alfaro-García

¿Qué es Programación Lineal?

PROGRAMACIÓN LINEAL (PL):

Técnica de optimización para problemas donde:
- **La FUNCIÓN OBJETIVO es LINEAL**
- **Las RESTRICCIONES son LINEALES**
- **Las VARIABLES son CONTINUAS**

→ Encontrar el MEJOR valor posible (máximo o mínimo)

NOTA: 'PROGRAMACIÓN' ≠ Código

Es PLANIFICACIÓN matemática (scheduling, planning)
Término histórico de los 1940s

LINEAL significa:

✓ PROPORCIONALIDAD: 2X cuesta el doble que X
✓ ADITIVIDAD: costo(X+Y) = costo(X) + costo(Y)

✗ NO puede haber: X^2, $\sqrt{X}$, X×Y, sen(X), log(X)

Si hay términos NO lineales → NO es PL
(sería Programación No Lineal, mucho más difícil)

Ejemplo Prototipo: Wyndor Glass Co.

SITUACIÓN:
Empresa produce puertas y ventanas de aluminio
Dos productos nuevos: P1 (puertas), P2 (ventanas)

GANANCIA: P1=$3,000/lote, P2=$5,000/lote

RECURSOS (horas/semana):
- Planta 1: 4h (solo P1)
- Planta 2: 12h (solo P2)
- Planta 3: 18h (ambos)

TIEMPO REQUERIDO por lote:
- P1: 1h Planta1, 0h Planta2, 3h Planta3
- P2: 0h Planta1, 2h Planta2, 2h Planta3

PREGUNTA: ¿Cuántos lotes producir de P1 y P2 para MAXIMIZAR ganancia?

PROCESO DE FORMULACIÓN:

1. Definir VARIABLES de decision (¿Qué controlo?)
2. Formular FUNCIÓN OBJETIVO (¿Qué optimizo?)
3. Expresar RESTRICCIONES (¿Qué límites debo respetar?)
4. Condiciones NO NEGATIVIDAD (¿Valores lógicos?)

Paso 1: Definir Variables de Decisión

PREGUNTA CLAVE:
¿Qué puedo CONTROLAR? ¿Qué estoy DECIDIENDO?
→ Esas son las VARIABLES

PARA WYNDOR:

X_1 = número de lotes de Producto 1 a producir por semana

X_2 = número de lotes de Producto 2 a producir por semana

TIPS CRÍTICOS:

✓ Especificar UNIDADES (lotes, kg, horas, $)
✓ Especificar PERIODO (día, semana, mes)
✓ Variables = cosas CONTROLABLES
✓ NO definir variables para DATOS (parámetros)

MAL: X_1 = ganancia P1
(no controlan ganancia directamente)

BIEN: X_1 = cantidad producir P1
(sí controlan cantidad)

Paso 2: Formular Función Objetivo

PREGUNTA CLAVE:
¿Qué quiero MAXIMIZAR o MINIMIZAR?
→ Expresarlo con las variables

Queremos: MAXIMIZAR ganancia total semanal

$$\text{Ganancia} = (\text{gan/lote P1}) \times (\text{lotes P1}) + (\text{gan/lote P2}) \times (\text{lotes P2})$$

$$= 3{,}000\ X_1 + 5{,}000\ X_2$$

FUNCIÓN OBJETIVO:

$$\text{Max } Z = 3{,}000X_1 + 5{,}000X_2$$

Coeficientes 3,000 y 5,000 son DATOS conocidos (parámetros)

Función es LINEAL: solo sumas y productos por constantes

Paso 3: Expresar Restricciones

PREGUNTA CLAVE:
¿Qué LÍMITES debo respetar?
→ Cada límite = una restricción matemática

PARA WYNDOR (capacidad de plantas):

PLANTA 1 (4h disponibles, solo P1):
Tiempo usado P1 ≤ Capacidad
$(1h/lote) \times X_1 \leq 4$
$X_1 \leq 4$ ← Restricción 1

PLANTA 2 (12h disponibles, solo P2):
$(2h/lote) \times X_2 \leq 12$
$2X_2 \leq 12$ ← Restricción 2

PLANTA 3 (18h disponibles, ambos):
$(3h/lote\ P1) \times X_1 + (2h/lote\ P2) \times X_2 \leq 18$
$3X_1 + 2X_2 \leq 18$ ← Restricción 3

Cada restricción es DESIGUALDAD LINEAL

Paso 4: Condiciones de No Negatividad

PREGUNTA CLAVE:
¿Tiene sentido que las variables sean NEGATIVAS?

Normalmente NO → Agregar restricciones $X \geq 0$

PARA WYNDOR:

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0$$

(No tiene sentido producir cantidades negativas)

MODELO COMPLETO:

$$\text{Maximizar: } Z = 3{,}000X_1 + 5{,}000X_2$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a: } & X_1 \leq 4 && \text{(Planta 1)} \\ & 2X_2 \leq 12 && \text{(Planta 2)} \\ & 3X_1 + 2X_2 \leq 18 && \text{(Planta 3)} \\ & X_1, X_2 \geq 0 && \text{(No negatividad)} \end{aligned}$$

¡ESTO ES UN MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL!

Terminología de Soluciones

SOLUCIÓN:
Cualquier asignación de valores a las variables

SOLUCIÓN FACTIBLE:
Solución que SATISFACE TODAS las restricciones
(incluida no negatividad)

SOLUCIÓN NO FACTIBLE:
Solución que VIOLA alguna restricción

SOLUCIÓN ÓPTIMA:
Solución factible con MEJOR valor de función objetivo
(máximo si maximizamos, mínimo si minimizamos)

REGIÓN FACTIBLE:
Conjunto de TODAS las soluciones factibles
(espacio geométrico definido por restricciones)

SOLUCIÓN BÁSICA:
Solución donde n variables son cero (concepto técnico Simplex)

SOLUCIÓN BÁSICA FACTIBLE:
Solución básica que además es factible
(candidato a óptimo, Simplex evalúa estas)

Ejemplo: Problema de Mezcla (Dieta)

SITUACIÓN:
Empresa de alimentos para mascotas. Mezclar ingredientes:
Carne ($3/kg), Cereal ($1/kg), Vegetales ($2/kg)
REQUERIMIENTOS NUTRICIONALES (por kg producto final):
• Proteína: ≥ 30g • Grasa: ≥ 20g • Fibra: ≥ 10g

CONTENIDO por kg ingrediente:

	Proteína	Grasa	Fibra
Carne	60g	40g	0g
Cereal	20g	20g	30g
Veg.	15g	5g	40g

FORMULAR modelo para MINIMIZAR costo respetando nutrición

VARIABLES:
X_1=kg carne, X_2=kg cereal, X_3=kg vegetales (por kg final)

OBJETIVO:
Min $C = 3X_1 + 1X_2 + 2X_3$ (costo en $)

RESTRICCIONES:
$60X_1 + 20X_2 + 15X_3 \geq 30$ (proteína)
$40X_1 + 20X_2 + 5X_3 \geq 20$ (grasa)
$0X_1 + 30X_2 + 40X_3 \geq 10$ (fibra)
$X_1 + X_2 + X_3 = 1$ (total 1kg)
$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Ejemplo: Problema Financiero (Cartera)

SITUACIÓN:
Inversionista con $100,000 para asignar entre:
Acciones (retorno 12%, riesgo alto)
Bonos (retorno 7%, riesgo medio)
CDT (retorno 5%, riesgo bajo)

RESTRICCIONES:
- Máximo 50% en acciones (por riesgo)
- Al menos 25% en CDT (seguridad)
- Retorno promedio ≥ 8%

FORMULAR para MAXIMIZAR retorno respetando políticas

VARIABLES:
X_1=$ en acciones, X_2=$ en bonos, X_3=$ en CDT

OBJETIVO:
Max $R = 0.12X_1 + 0.07X_2 + 0.05X_3$ (retorno $)

RESTRICCIONES:
$X_1 + X_2 + X_3 = 100{,}000$ (presupuesto)
$X_1 \leq 0.5(X_1+X_2+X_3)$ → $X_1 \leq 50{,}000$ (máx acciones)
$X_3 \geq 0.25(X_1+X_2+X_3)$ → $X_3 \geq 25{,}000$ (mín CDT)
$0.12X_1+0.07X_2+0.05X_3 \geq 0.08 \times 100{,}000$ (retorno mín)
$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Ejemplo: Planificación de Personal

SITUACIÓN:
Call center 24/7, turnos de 8 horas:
Turno 1: 00-08h (necesita ≥3 operadores)
Turno 2: 08-16h (necesita ≥6 operadores)
Turno 3: 16-24h (necesita ≥4 operadores)

COSTO por operador:
Turno 1: $200/día (nocturno)
Turno 2: $150/día (diurno)
Turno 3: $180/día (tarde)

FORMULAR para MINIMIZAR costo nómina cubriendo demanda

VARIABLES:
X_1=operadores turno1, X_2=turno2, X_3=turno3

OBJETIVO:
Min C = $200X_1 + 150X_2 + 180X_3$ (costo diario $)

RESTRICCIONES:
$X_1 \geq 3$ (cobertura turno 1)
$X_2 \geq 6$ (cobertura turno 2)
$X_3 \geq 4$ (cobertura turno 3)
$X_1, X_2, X_3 \geq 0$ y ENTEROS

NOTA: Requerir enteros hace problema más difícil
(Programación Entera, no PL pura)

Proceso General de Formulación

RECETA UNIVERSAL para formular PL:

1. LEER problema completo, identificar:
- ¿Qué decido? (variables)
- ¿Qué optimizo? (objetivo)
- ¿Qué límites? (restricciones)

2. DEFINIR variables decisión:
- Nombres claros con unidades y periodo
- Solo para cosas controlables

3. ESCRIBIR función objetivo:
- Max o Min
- Expresión lineal con variables

4. ESCRIBIR restricciones:
- Una por cada limitación
- Desigualdad o igualdad lineal
- Verificar unidades consistentes

5. AGREGAR no negatividad:
- $X_i \geq 0$ para todas las variables

6. REVISAR:
- ¿Todo es lineal?
- ¿Unidades consistentes?
- ¿Captura la lógica del problema?

PRÁCTICA, PRÁCTICA, PRÁCTICA

Resumen y Próxima Semana

LO QUE APRENDIMOS HOY:

✓ Qué es Programación Lineal
(optimización con restricciones lineales)

✓ Cuándo aplicar PL
(producción, mezcla, finanzas, personal)

✓ Proceso de formulación (4 pasos):
1. Variables decisión
2. Función objetivo
3. Restricciones
4. No negatividad

✓ Ejemplos diversos

PRÓXIMA SEMANA:

Método GRÁFICO para resolver PL
(solo 2 variables, pero desarrolla intuición)

¡A PRACTICAR FORMULACIÓN!